

論 文

非整数階微分を含む物質移動モデルを用いた坑井間距離の異なる
トレーサー応答推定の検証

鈴木杏奈*・蒔田浩士*・新堀雄一**・橋田俊之***

(平成 25 年 3 月 26 日受付, 平成 25 年 9 月 24 日受理)

A Study of Prediction of Tracer Response at Different Inter-well Distances Using Fractional Advection-Dispersion Equation

Anna SUZUKI *, Hiroshi MAKITA *, Yuichi NIIBORI ** and Toshiyuki HASHIDA ***

Abstract

Use of fractional Advection-Dispersion Equation (fADE) has been proposed to describe mass transport in a fractured reservoir. In this study, a finite discrete method to solve the fADE is developed and its accuracy is tested against analytical solutions.

Tracer simulation is carried out using a 3D simulation code for flow analysis (FRACSIM-3D). The fADE mathematical model is applied to fit the numerical tracer results, which show highly anomalous behaviors such as a long tail. The solution to the fADE including a spatial fractional derivative is shown to be in reasonable agreement with the tracer response produced by FRACSIM-3D. The fitting parameters of the fADE equation obtained for well interval of 50 m are used to make predictions of tracer responses for well intervals of 100 m – 500 m. It has been shown that the tracer responses predicted by the fADE model are reasonable close to those obtained by FRACSIM-3D irrespective of the different well intervals. This study demonstrates that the fADE offers a method for predicting tracer responses in a fractured reservoir.

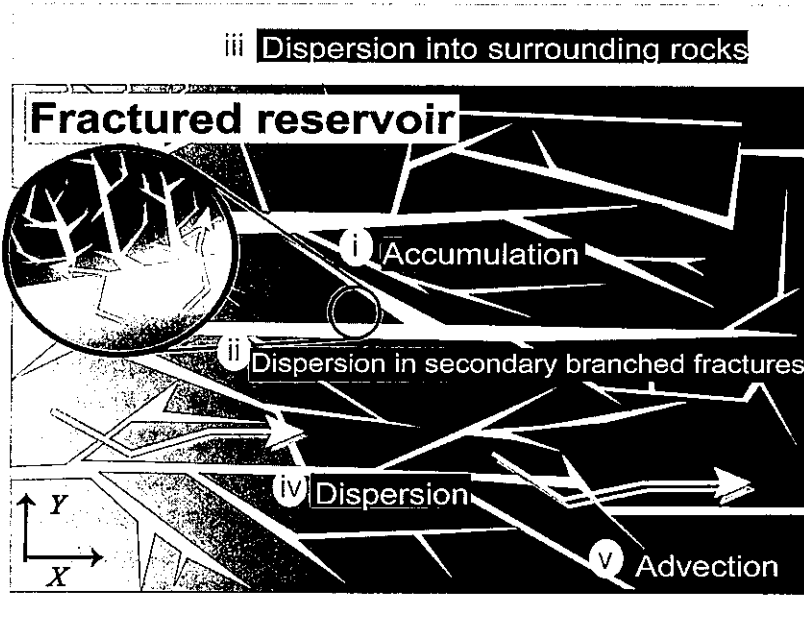
Keywords: reinjection, tracer test, fractional derivatives, numerical simulation

* 東北大学大学院環境科学研究科 〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11-707
Graduate School of Environmental Studies, Tohoku University, 6-6-11-707, Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai, Miyagi 980-8579, Japan

** 東北大学大学院工学研究科量子エネルギー工学専攻 〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01-2
Department of Quantum Science and Energy Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University, 6-6-01-2, Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai, Miyagi 980-8579, Japan

*** 東北大学大学院工学研究科附属エネルギー安全科学国際研究センター 〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11-709
Fracture and Reliability Research Institute, Graduate School of Engineering, Tohoku University, 6-6-11-709, Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai, Miyagi 980-8579, Japan

©The Geothermal Research Society of Japan, 2013



$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + b \frac{\partial^\gamma C}{\partial \tau^\gamma} + b' \frac{\partial^\beta C}{\partial \tau^\beta} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial \vartheta}{\partial X} - \frac{\partial C}{\partial X}$$

$$\vartheta = \left(p \frac{\partial^\alpha C}{\partial X^\alpha} + (1-p) \frac{\partial^\alpha C}{\partial (-X)^\alpha} \right)$$

C: Concentration
T: Time
X: Distance
b, b': Retardation factor
Pe: Peclet number
p: Skewness parameter
α, β, γ: Fractional derivative
 (0 < α ≤ 1)(0.5 ≤ β ≤ 1)(0.5 ≤ γ ≤ 1)

Fig. 1 Schematic of the fADE in a fractured aquifer.

仮定し、また貯留層は浸透率の低い周辺岩盤によって囲われているとする。以上の条件を考慮することにより導出された一次元の断裂型貯留層における物質移動の支配方程式を以下に示す (Fomin et al., 2011)。

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + a \frac{\partial^\gamma c}{\partial t^\gamma} + a' \frac{\partial^\beta c}{\partial t^\beta} = - \frac{\partial(\phi J)}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2)$$

ここで $c[\text{kg/m}^3]$ は濃度、 $t[\text{s}]$ は時間、 $x[\text{m}]$ は距離、そして $J[\text{kg/m}^2\text{s}]$ は質量流速を表している。また、 $\phi[-]$ は貯留層の孔隙率、 $a[\text{s}^\gamma]$ 、 $a'[\text{s}^\beta]$ は遅延係数、 $v[\text{m/s}]$ は平均流速、 $\beta(1/2 \leq \beta \leq 1)$ および $\gamma(1/2 \leq \gamma \leq 1)$ は時間微分の階数である。フラクタル構造を有する不均質な媒体における拡散を考えた場合、物理量はき裂のフラクタル次元に依存した関数であり、距離に対してべき乗的に変化すると考えられる。そのため、貯留層内における物質の流束 J は空間に関する微分の階数 $\alpha(0 < \alpha \leq 1)$ を含んだ以下の式で記述される。

$$J = -D \left(p \frac{\partial^\alpha c}{\partial x^\alpha} + (1-p) \frac{\partial^\alpha c}{\partial (-x)^\alpha} \right) \quad (3)$$

ここで $D[\text{m}^{1-\alpha}/\text{s}]$ は分散係数、 $p[-](0 \leq p \leq 1)$ は濃度の分布における歪度を表現するパラメータである。式(3)で

与えられる物質の流束においては対象地点から下流方向への分散と上流方向への分散が考慮されており、式(3)の第一項および第二項でそれぞれ表現されている (Deng et al., 2004; Meerschaert and Tadjeran, 2006; Huang et al., 2008)。無次元化するために、以下の無次元数を定義する。

$$X = \frac{x}{l}; C = \frac{c}{c_m}; \tau = \frac{t}{t_m}; Pe = \frac{l^{1+\alpha}}{t_m D}; v = \phi \frac{l}{t_m}; b' = \frac{a_1}{\phi^{\beta-1}}; b = \frac{a_2}{\phi^{\gamma-1}}; \quad (4)$$

式(3)を式(2)に代入し、式(4)を用いて無次元化した式を以下に示す。

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + b \frac{\partial^\gamma C}{\partial \tau^\gamma} + b' \frac{\partial^\beta C}{\partial \tau^\beta} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial X} \left(p \frac{\partial^\alpha C}{\partial X^\alpha} + (1-p) \frac{\partial^\alpha C}{\partial (-X)^\alpha} \right) - \frac{\partial C}{\partial X} \quad (5)$$

ここで C 、 τ および X はそれぞれの物理量の代表値で規格化した貯留層内の濃度、時間、進行方向の距離を表している。濃度は注入時の濃度を代表値とする。代表時間は任意の代表距離を式(2)内の速度 v で移動するのにかかる時間とする。 b は遅延係数、 Pe はペクレ数である。なお、式(5)の左辺第一項は蓄積項であり、左辺第二項は主たる流路を形成する大きなき裂から枝分かれした微細な副次的き裂への分散を表現している。左辺第三項は周辺岩盤への拡散を表している。また、右辺第一項およ

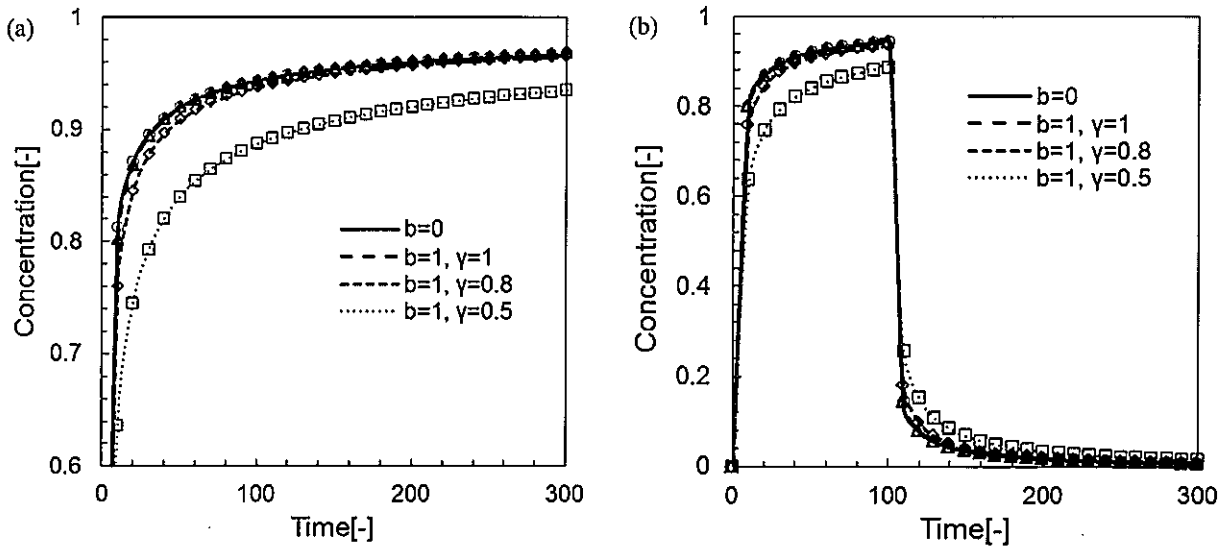


Fig. 2 Analytical solutions and numerical solutions of Eq.(2) at $X=1$ for $b=1$, $\gamma=0.5, 0.8$, and 1 , and $Pe = \infty$. (a) Tracers are injected as steps for $C_{in}=1$ and (b) as pulse for $C_{in}=1$ and $T_{in}=1$.

クモデルに基づくシミュレーションモデル FRACSIM-3D を用いた (Watanabe and Takahashi, 1995; Willis-Richards et al., 1996; Jing et al., 2000)。なお、FRACSIM-3D で算出されたトレーサー応答曲線の形状はフィールドで観測されるものと調和的であることが確認されており、トレーサー応答解析に有効なモデルであると判断している (Jing et al., 2000)。

解析の流れと計算領域の模式図をそれぞれ Fig. 3,

Fig.4 に示す。計算に用いたパラメータを Table 1 に記載する。式 (5) では周辺岩盤への拡散の影響も考慮しているが、ここでは、周辺岩盤の浸透率は極めて小さく、貯留層内でのみ流動するものと仮定する。

FRACSIM-3D では、所定のき裂密度に応じて解析領域上に円盤形のき裂を分布させる (Fig. 3(a))。このとき、き裂の数 N はき裂長さのフラクタル性を考慮し、以下の式を用いて算出する。

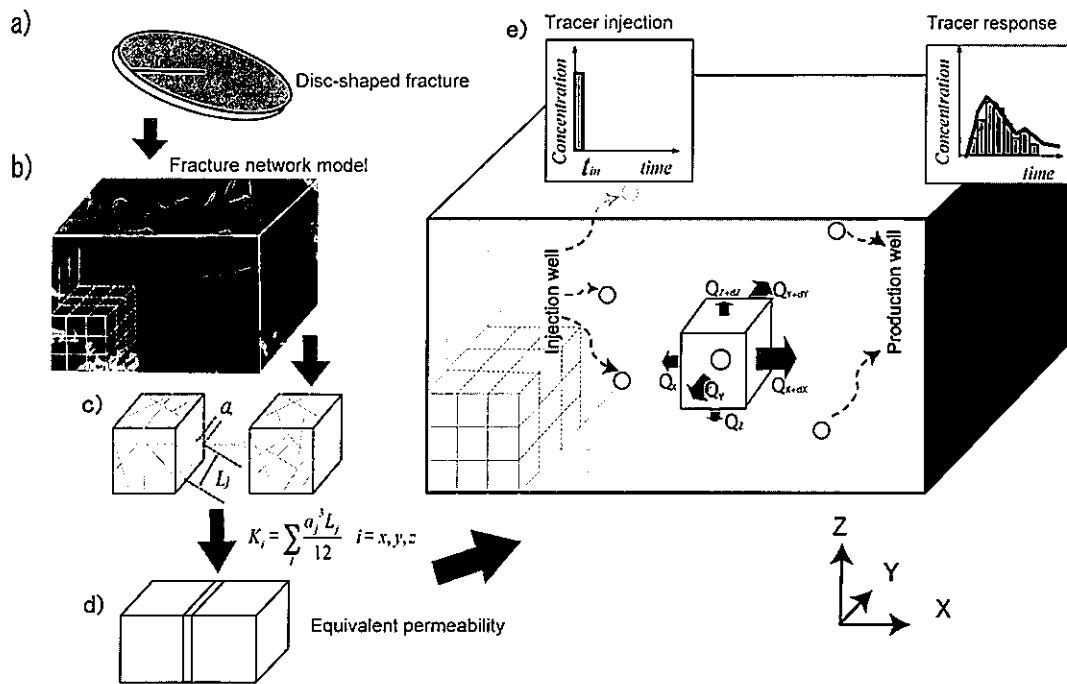


Fig. 3 Concept of tracer response analysis based on the fractured reservoir model

さ、 a_j はき裂 j の開口幅、 μ は流体の粘性係数である。なお、流体の密度および粘性係数は圧力によらず一定とした。要素の各側面に実効的に与えられる体積流量は、式 (15) の要素間浸透率と隣接する 2 つの要素に与えられた圧力の勾配を用いて、以下のダルシー則に基づいて算出される。

$$q_i = -\frac{K_i A}{\mu} \frac{\partial P}{\partial i} \quad i = x, y, z \quad (16)$$

ここで A は側面の断面積、 $\partial P/\partial i$ は i 軸方向の隣接する 2 つの要素から求まる圧力勾配である。得られた体積流量から側面の断面積を除し、実効的な流速を算出する。本研究では、計算領域の上流端および下流端に一定圧力条件を与えることによって、 X 方向の一次元流動を模擬している。それ以外の境界面には不透水境界を与えている。

Fig.3(e) に示すように、トレーサーは重さの無視できる粒子の集合であると仮定し、多数のトレーサー粒子 (10000 個) を注入領域から貯留層内へパルス的に $T=0.1$ で注入する。それぞれのトレーサー粒子は、粒子が存在している要素から隣接する要素へと順次移動していく。このとき、それぞれのトレーサー粒子が次の要素に移動する方向については、要素の各側面に与えた体積流量の大きさ (式 (16)) に基づいて確率的に決定される。すなわち、体積流量の大きい方向に高い確率で流れるように計算を行っている。それぞれのトレーサー粒子ごとに、要素間に与えられた流速を基に粒子が隣接する要素へ移動する時間を積算し、生産領域までの到達時間を求める。ある時間の範囲に生産領域まで到達したトレーサー粒子の個数を集計し、その個数を濃度と見なし、その時間に対する分布をトレーサー応答曲線とする。本手法では、それぞれのトレーサー粒子の到達時間を計算し、それを濃度計算に用いているため、トレーサー濃度に関する数値拡散の影響はない。そのため、トレーサー量は厳密に評価することができる。

計算領域の大きさは $540 \text{ m} \times 250 \text{ m} \times 250 \text{ m}$ とした。本研究では、トレーサーを YZ 平面から注入し、 YZ 平面で観測する場合 (Fig.4(a)) と、坑井を設置して、トレーサーが注入井から生産井まで移動する場合 (Fig.4(b)) を計算する。前者は巨視的な一次元流動を模擬しているため、一次元の理論モデルとの比較が容易である。この場合を一次元流動と呼ぶことにする。このとき、上流端の圧力は $1.001 \times 10^6 \text{ Pa}$ 、下流端の圧力は $1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ とした。後者はボアホールを設置することによって、実際のフィールドに近い状況を模擬している。この場合をボアホール間流れと呼ぶことにする。一次元流動の場合は、 $X=20$ に位置する YZ 平面を注入領域として固定し、注入領域

から所定距離離れた生産領域 (YZ 平面) へ移動するトレーサー挙動を評価する。このとき、貯留層内の圧力勾配は X 方向に対してほぼ一定である。ボアホール間流れの場合には、深度方向に対してその中央に裸坑部を有する注入井および生産井をそれぞれ配置している。裸坑部の長さは 40 m である。このとき、注入井および生産井には、一次元流動を計算する際に求めた圧力分布に対して $\pm 10\%$ の圧力を与えることにより、注入井および生産井の周辺にのみ圧力勾配が形成され、トレーサーがボアホール間を移動する挙動を模擬している。すなわち、運転開始前の自然状態における流動状態を想定しており、運転に伴う圧力変動が貯留層内の圧力分布に大きな影響を及ぼさない場合を考慮の対象としている。

4. 結果と考察

断裂型貯留層におけるトレーサー応答の特徴を把握するため、異なるき裂密度におけるトレーサー応答を評価した。坑井間距離を 300 m に固定し、一次元流動の場合の流体流動を計算した。き裂密度が $17.3[1/\text{m}]$ と $0.58[1/\text{m}]$ の場合のトレーサー応答を Fig. 5 に示す。ただし、き裂密度は、計算領域内に設置した直線と交わるき裂の本数を表している。トレーサー応答はそれぞれの物理量の代表値で規格化している。すなわち、距離は坑井間距離、時間は平均滞留時間を用いて無次元化した。なお、濃度は前述したように注入時の濃度を用いて無次元化している。貯留層内流動が移流のみでなく、分散効果を含む場合には、次式で与えられる実効的な平均滞留時間 (日本地下水学会, 2009) が用いられる。

$$T_{\text{effective}} = \frac{T_{\text{peak}} + T_{\text{median}}}{2} \quad (17)$$

T_{peak} は観測地点における濃度がピークとなる時間、 T_{median} はトレーサーの量を積算した累積トレーサー量が投入したトレーサー量に対して 50% となる時間である。

Fig.5 より、き裂密度が $0.58[1/\text{m}]$ の場合のトレーサー応答には、ピークの後方に長いテールが観察された。トレーサー応答に現れる長いテールは、地熱フィールドやコア実験で観測される異常拡散の特徴である。ここで、それぞれのき裂密度における浸透率分布の不均質性を評価するため、FRACSIM-3D で計算される各要素の浸透率の度数分布を求めた。ここで要素の浸透率は、要素側面において計算された要素間の等価浸透率 (式 (15)) の平均値、すなわち一つの要素に対して各軸方向の対向する側面に与えられた 6 つの等価浸透率の平均を求めることにより評価している。浸透率の度数分布を Fig. 6 に示す。き裂密度が大きい $17.3[1/\text{m}]$ の場合の浸透率分布は、ガウス分布に近い左右対称的なつりがね状の分布を

を最適化問題の目的関数として、fADE 構成パラメータの最適値を求めた。すなわち、FRACSIM-3D ならびに fADE モデルにより算出されたトレーサー濃度と時間の曲線上のデータ点について、同一時間における 2 つの濃度の差に関する RMSE を最小にするように fADE 構成パラメータを決定した。RMSE を以下に示す。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\log C_i^{fADE} - \log C_i^{tracer})^2} \quad (18)$$

ここで、トレーサー応答のピーク挙動のみならず、テール挙動などの長期における挙動についての予測についても十分に比較できるようにするために、濃度の対数に基づいて RMSE を求めている。N はデータ点数、 C_i^{fADE} は fADE モデルにより算出される濃度、 C_i^{tracer} は FRACSIM-3D によるトレーサー応答の濃度を表している。なお、今回の FRACSIM-3D による数値計算では、トレーサー粒子 10000 個をパルス的に $T=0.1$ で注入し、その注入量を基に無次元化しているため、トレーサー濃度の分解能はトレーサー 1 ヶに相当する 10^5 となる。微量濃度の誤差による影響を抑えるため、 C_i^{fADE} および C_i^{tracer} が 10^5 以上のデータを用いて RMSE を算出することにした。

坑井間距離が異なる場合のトレーサー応答を予測するために、き裂密度 $1.5[1/m]$ の場合のトレーサー応答に対し、fADE モデルおよび ADE モデルを適用した。はじめに、坑井間距離が 50 m の場合のトレーサー応答を計算し、fADE モデルおよび ADE モデルを用いてカーブフィッティングを行った。一次元流動の場合のトレーサー応答を Fig. 7(a) に、ボアホール間流れの場合のトレーサー応答を Fig. 8(a) に示す。設定した基準坑井間距離 (50 m) は、一般的な地熱フィールドにおける坑井間距離の絶対値と対応するものではなく、数値解析の一例として設定したものに他ならない。本研究で用いたき裂ネットワークモデルは任意に設定したき裂長さのフラクタル次元やき裂密度などの一般的なき裂パラメータに基づいて作成したものであり、坑井間距離長さの絶対値としての位置づけ、意味づけは、設定したき裂ネットワークモデルに依存することが考えられる。したがって、50 m という値に実用上の意味があるわけではなく、解析の一例として設定したものとなっている。しかしながら、50 m の坑井間距離に対して得られたトレーサー応答の計算結果は実フィールドで観察される結果の特徴を再現するものとなっており、基準の坑井間距離として用いてもよいと判断している。

フィッティングにより最適化されたそれぞれの fADE 構成パラメータは、一次元流動の場合、ADE モデルでは $b = 0.08$, $Pe = 4.29$, fADE モデルでは $\alpha = 0.1$, $\gamma =$

1.0 , $b = 0.65$, $Pe = 1.63$, また、ボアホール間流れの場合、ADE モデルでは $b = 0.0$, $Pe = 8.92$, fADE モデルでは $\alpha = 0.66$, $\gamma = 0.7$, $b = 0.02$, $Pe = 9.0$ となった。Fig. 7(a), Fig. 8(a) より、一次元流動およびボアホール間流れのどちらの場合もトレーサー応答に長いテールが現れるのを観察した。ここで、ADE モデルによるフィッティングカーブはガウス分布に近い形状を示し、長いテールをよく表すことができていない。一方、fADE モデルでは、テール部分の特徴をよく再現することができている。fADE モデルのパラメータを最適化した結果、一次元流動の場合、時間微分の階数 γ が $\gamma = 1.0$ となり、遅延項は通常の時間に関する 1 次微分により表現できることがわかる。また、ボアホール間流れの場合、 $\gamma = 0.7$ となるが、遅延係数 b の値が小さく、この場合も時間の非整数階微分を含む遅延項の影響は小さいと言える。すなわち、トレーサー応答に見られる長いテール挙動は空間の非整数階微分により特徴づけることができています。

次に、上述の最適化された fADE 構成パラメータを用いて、坑井間距離を長くした場合のトレーサー応答の予測を行った。一次元流動の場合の結果を Fig. 7(b)(c), ボアホール間流れの場合の結果を Fig. 8(b)(c) にそれぞれ示す。Table 2 と Table 3 には、それぞれの流動条件における RMSE の値をまとめている。なお、平均二乗誤差を算出する際には、坑井間距離の違いによりピークの濃度に変化することから、それぞれの濃度のピーク値で規格化することにより、それぞれの応答に対する相対的な誤差を示している。一次元流動の場合、Fig. 7(b)(c) に示されているように、坑井間距離が長くなるのに従って、トレーサー応答の濃度のピークが減少するとともに、ピークの現れる時間が遅くなることが観察される。このトレーサー応答に対し、ADE モデルはトレーサー応答のピークの特徴をよく予測できているが、長いテールの特徴を表すことができないことがわかる。一方、fADE モデルはピークの特徴だけではなく、長いテール挙動もよく予測することができている。このように、坑井間距離が 50 m のトレーサー応答から決定した fADE 構成パラメータに基づき、坑井間距離が 250 m ならびに 450 m のトレーサー応答を予測できるという結果は、複雑なき裂分布を有する貯留層であったとしても、その分布の特徴が対象領域内で同じであれば、fADE モデルを用いることによって、スケールに依らずに物質移動挙動を表現できることを示唆している。このことより、一様で均質な貯留層の物質移動を表現する ADE モデルに対して、fADE モデルは複雑なき裂分布を有する貯留層に対して展開できる数値モデルであるということができよう。

ボアホール間流れの場合、Fig. 8(b)(c) より、fADE モデルは ADE モデルよりも小さい誤差で異なる坑井間

Table 2 RMSE as indicators of performance of prediction for one-dimensional flow. RMSE is the root mean square error.

Well spacing [m]	RMSE	
	ADE	fADE
50(fitting)	3.63	0.14
250	2.16	0.20
450	1.80	0.20

距離のトレーサー応答を予測できていることが観察される。しかしながら、坑井間距離が長くなるに従って、fADE モデルによる予測結果も ADE モデルと同様、ピークの高さが FRACSIM-3D により評価されたトレーサー応答におけるものよりも高くなることがわかった。ここで、坑井間距離と再湧出率の関係を Fig. 9 に示す。一次元流動の場合、再湧出率は 1 に近く、ほぼ全てのトレーサー粒子が生産領域に到達している。生産領域に到達しないわずかなトレーサー粒子に関しては、その粒子が生産領域まで到達せず、途中の要素で極めて大きな滞在時間を示すことを確認している。したがって、それらの粒子は低浸透率の領域、すなわち流動が極めて限られている領域に入り込み、貯留層内でとどまったものと考えられることができる。一方、ポアホール間流れの場合は、坑井間距離の違いによって再湧出率が大きく変化している。粒子の経路を追跡した結果、再湧出しないトレーサー粒子の多くが生産井へ向かう経路から外れて下流方向に散逸したことを確認している。これは坑井間に横断的なき裂が存在するため、坑井間に連結のない流路があることを示唆している。Fig. 8(b) および Fig.8(c) には、fADE モデルおよび ADE モデルとトレーサー応答との比較に加えて、fADE モデルの予測結果に再湧出率を考慮した結果を示している。Fig. 8(b) および Fig.8(c) に示すように、再湧出率を考慮することによって、fADE モデルで予測した濃度のピークの高さが FRACSIM-3D によるトレーサー応答のピークの高さに近づくことが観察される。したがって、再湧出率の変化を考慮することによって fADE モデルによる予測のずれを補正できると推察される。実際のフィールドでは再湧出率は坑井間によってそれぞれ異なり、坑井を掘削するまで、その地点に対する再湧出率を予測することは困難である。今回、貯留層内の流動に議論を限定するために無視した式 (5) の左辺第三項、すなわち、周辺岩盤への拡散を表わす項は、系外へ物質が流出する挙動を評価できると報告されている

Table 3 RMSE as indicating prediction performance for interwell flow.

Well spacing [m]	RMSE		
	ADE	fADE	fADE with recovery rate
50(fitting)	0.88	0.18	-
100	0.28	0.19	0.17
150	0.83	0.25	0.20
200	0.63	0.46	0.34
250	0.83	0.47	0.45
300	0.84	0.49	0.48
350	1.03	0.38	0.44
400	1.12	0.49	0.47

(Zhang et al., 2009)。したがって、fADE モデルにおける式 (5) の左辺第三項の影響を調査することによって、異なる坑井間距離における再湧出率の影響を評価できることが期待される。また、fADE モデルにより予測される濃度のピークは、FRACSIM-3D によるトレーサー応答の濃度のピークよりも早い時間に生じる傾向を示している。ポアホール間流れの場合、計算領域には一次元の自然流を与えているのに加えて、還元井における吹出しや生産井での吸込みに伴い、トレーサーが三次元的に移動することが観察されている。坑井間距離が長いほど直線距離と比べてトレーサーの移行距離が長くなり、滞留時

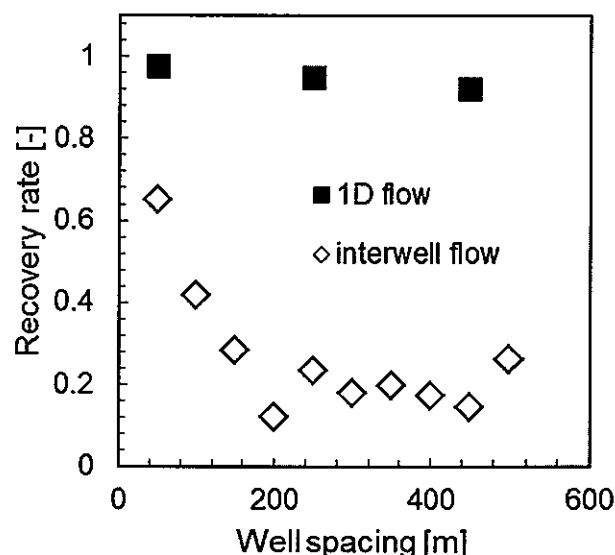


Fig. 9 Relation between tracer recovery and well spacing.

- the Two-Fractured-Layer model. *Geothermics*, **24**, 1, 49-60.
- 日本地下水学会 (2009) 地下水のトレーサー試験. 技報堂出版, 383p.
- Suzuki, A., Makita, H., Niibori, Y., Fomin, S. A., Chugunov, V. A. and Hashida, T. (2012) Characterization of Tracer Responses Using Fractional Derivative-Based Mathematical Model and Its Application to Prediction of Mass Transport in Fractured Reservoirs, *GRC Transactions*, **36**, 1391-1396.
- Schumer R. and Benson D.A. (2003) Fractal mobile/immobile solute transport. *Water Resources Research*, **39**, doi: 10.1029/2003WR002141.
- Shook, G.M. (1999) Prediction of Thermal Breakthrough from Tracer Tests. Proceedings of 24th Stanford Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, SGP-TR-162.
- Shook, G.M. (2001) Predicting thermal breakthrough in heterogeneous media from tracer tests. *Geothermics*, **30**, 6, 573-589.
- Stefansson, V. (1997) Geothermal reinjection experience. *Geothermics*, **26**, 1, 99-139.
- Tsang, Y.W. and Tsang, C.F. (1987) Channel model of flow through fractured media. *Water Resources Research*, **23**, 3, 467-479.
- Vandenplaats, G. N. and Sugimoto, H. (1986) A general-purpose optimization program for engineering design. *International Journal of Computers and Structures*, **24**, 13-21.
- Watanabe, K. and Takahashi, H. (1995) Fractal geometry characterization of geothermal reservoir fracture networks. *Journal of Geophysical Research*, **100**, B1, 521-528.
- Willis-Richards, J., Watanabe, K., and Takahashi, H. (1996) Progress toward a stochastic rock mechanics model of engineered geothermal systems. *Journal of Geophysical Research*, **101**, B8, 17481-17496.
- Wu, X., Pope, G.A., Shook, G.M. and Srinivasan, S. (2008) Prediction of enthalpy production from fractured geothermal reservoirs using partitioning tracers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **51**, 5-6, 1453-1466.
- Zhang X., Crawford J., Deeks L, Stutter, M.I., Bengough, A.G. and Young, I.M. (2005) A mass balance based numerical method for the fractional advection-dispersion equation: Theory and application. *Water Resources Research*, **41**, W07029, doi:10.1029/2004WR003818.
- Zhang, X., Lv, M., Crawford, J.W. and Young, I.M. (2007) The impact of boundary on the fractional advection-dispersion equation for solute transport in soil: Defining the fractional dispersive flux with the Caputo derivatives. *Advances in Water Resources*, **30**, 5, 1205-1217.
- Zhang, Y., Benson, D.A. and Reeves, D.M. (2009) Time and space nonlocalities underlying fractional-derivative models: Distinction and literature review of field applications. *Advances in Water Resources*, **32**, 4, 561-581.